

FICHES TERMINALE SPÉCIALITÉ MATHS RÉVISIONS EXPRESS BAC 2025

I. La démonstration par récurrence

Objectif

Démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, où n_0 est un entier donné.

Démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- 1) **Initialisation** : Montrer que $P(n_0)$ est vraie.
- 2) **Hérédité** : Supposer $P(k)$ vraie (hypothèse de récurrence), montrer que $P(k+1)$ est vraie.
- 3) **Conclusion** : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple-type

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ ✓

Hérédité : Supposons que la formule est vraie pour un certain $k \geq 1$, donc $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Montrons que cela implique : $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

À gauche : $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ✓

Conclusion : La propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$. ✓

Conseils

- ✓ Toujours identifier clairement $P(n)$ avant de commencer.
- ✓ Ne pas oublier de bien rédiger chaque étape avec des phrases complètes.
- ✓ L'hérédité est souvent la plus technique : travailler les calculs avec soin.

Exercice 01 — Exercice-Type : Démonstration par récurrence

Démontrons par récurrence la propriété $P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Initialisation : Pour $n = 1$: $1^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$.

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $k \geq 1$, c'est-à-dire :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

et montrons qu'elle est vraie pour $k + 1$, c'est-à-dire :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$(\text{On met au même dénominateur}) = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$(\text{On factorise par } (k+1)^2) = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$(\text{On utilise } a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

II. Suites numériques

Suites arithmétiques - Suites géométriques

- Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.
- Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, à condition de pouvoir montrer que les termes u_n sont tous non nuls.
- Si l'on n'est pas sûr d'avoir tous les termes u_n non nuls, on montre que la suite (u_n) est géométrique en exprimant u_{n+1} en fonction de u_n et en montrant que $u_{n+1} = q \times u_n$, où q est un réel (ne dépendant pas de n).

Suite Arithmétique

$$u_n = 2n + 3$$

- 1) $u_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$
- 2) $u_{n+1} - u_n = (2n + 5) - (2n + 3) = 2$

Conclusion : La différence est constante, donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$.

Suite Géométrique

$$v_n = 3 \cdot 2^n$$

- 1) $v_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n \times 2$
- 2) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \cdot 2^n \times 2}{3 \cdot 2^n} = 2$

Conclusion : Le rapport est constant, donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$.

Sens de variation d'une suite numérique

Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut :

- ✓ Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n pour lequel u_n est définie.
- ✓ Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ si les termes u_n sont tous de même signe. Il faut que (u_n) soit différent de 0.

Exemple 1 :

$$u_n = n^2 + 3n$$

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = n^2 + 5n + 4$$

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 5n + 4) - (n^2 + 3n) = 2n + 4$$

Comme $n \geq 0$, $2n + 4 > 0$.

Conclusion : La suite est croissante.

Exemple 2 :

$$u_n = 2^n$$

$$u_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Comme $2 > 1$ et $u_n > 0$, la suite est croissante.

Conclusion : La suite est croissante.

Limite de q^n - Suites géométriques

- ✓ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ✓ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- ✓ Si $q = 1$, alors $q^n = 1$ pour tout n .
- ✓ Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite (diverge).

III. Limite d'une Suite

Définition de la convergence

On dit que la suite (u_n) **converge vers une limite** $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff u_n \text{ devient arbitrairement proche de } l \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Limite infinie

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff$ les termes de (u_n) deviennent **aussi grands que voulu**

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \iff$ les termes de (u_n) deviennent **aussi négatifs que voulu**

Théorèmes utiles

✓ **Monotonie et bornée :**

- Si (u_n) est croissante et majorée \implies elle converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée \implies elle converge.

✓ **Théorème des gendarmes :**

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

Méthode : Cas des suites définies par récurrence

Pour étudier la limite d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$:

- 1) Montrer que (u_n) est monotone.
- 2) Montrer que (u_n) est bornée.
- 3) En déduire la convergence.
- 4) Résoudre l'équation $l = f(l)$ si nécessaire.

IV. Limite d'une fonction

1. Fonctions et limites de référence

Limites de référence

| Fonction | $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ |
|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| x^n (n pair) | $+\infty$ | $+\infty$ |
| x^n (n impair) | $-\infty$ | $+\infty$ |
| e^x | 0 | $+\infty$ |
| $\ln(x)$ | - | $+\infty$ |
| \sqrt{x} | - | $+\infty$ |

$\ln(x)$ et \sqrt{x} ne sont définies que sur $]0, +\infty[$ et $[0, +\infty[$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Asymptotes

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$, la droite $y = a$ est **asymptote horizontale** à la courbe.
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$ (b fini), la droite $x = b$ est **asymptote verticale** à la courbe.

2. Opérations sur les limites

Tableau des opérations – Formes indéterminées

Les **formes indéterminées** (F.I.) sont les cas où on ne peut pas conclure directement :

$$\infty - \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \times \infty$$

Méthodes pour lever une indéterminée :

- ✓ Factorisation par le terme de plus haut degré.
- ✓ Quantité conjuguée (différence de racines carrées).
- ✓ Utilisation des croissances comparées.

Croissances comparées

Pour tout entier naturel non nul n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

Composition de limites

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

3. Formes indéterminées – Exemples

Mathspé Limite d'une fonction : cas d'une forme indéterminée

Exercice 02 — Forme " $\infty - \infty$ "

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 3)$

Méthode : On factorise par le terme de plus haut degré.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\text{Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Attention

En $+\infty$ (ou $-\infty$), la limite d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Exercice 03 — Forme " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{x - 3}$

Méthode : On factorise par les termes de plus haut degré.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{1}{x} - 2)}{x(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2}{1 - \frac{3}{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.

Attention

En $+\infty$ (ou $-\infty$), la limite d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

Exercice 04 — Forme " $\frac{0}{0}$ "

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Méthode : On factorise le numérateur et le dénominateur.

$$- x^2 - x - 2 : \Delta = 9, x_1 = -1, x_2 = 2 \implies (x+1)(x-2)$$

$$- x^2 - 3x + 2 : \Delta = 1, x_1 = 1, x_2 = 2 \implies (x-1)(x-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$.

Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

Exercice 05 — Forme " $0 \times \infty$ "

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 - 3)$

Méthode : On développe.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 3e^x)$$

D'après les croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 0.$$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Rappels : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

4. Théorèmes d'encadrement et de comparaison**Théorème d'encadrement (des gendarmes)**

Si : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
 et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$
 alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Théorèmes de comparaison

- Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- Si $g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

Exemples

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

— On sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$.

— Pour $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

— Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

— D'après le th. des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Exemples

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2 + \cos x)$.

— On sait que $\cos x \geq -1$.

— Donc $2 + \cos x \geq 2 - 1$, soit $2 + \cos x \geq 1$.

— Ainsi, $x^2(2 + \cos x) \geq x^2$.

— Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

— Par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

V. Compléments sur la dérivation

Tableau des formules de dérivées

| Fonction $f(x)$ | Dérivée $f'(x)$ | Fonction $f(x)$ | Dérivée $f'(x)$ |
|-----------------|-------------------------------------|-----------------|------------------------|
| x^n | nx^{n-1} | e^u | $u'e^u$ |
| e^x | e^x | $\ln(u)$ | $\frac{u'}{u}$ |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sin(u)$ | $u' \cos(u)$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\cos(u)$ | $-u' \sin(u)$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ | u^n | $nu'u^{n-1}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | \sqrt{u} | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\cos(ax + b)$ | $-a \sin(ax + b)$ |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\sin(ax + b)$ | $a \cos(ax + b)$ |

Calculs détaillés

- **Somme/Différence** : $f(x) = x^2 + \ln(x) \implies f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$
- **Produit** : $f(x) = x^2 \cdot e^x \implies f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
- **Quotient** : $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} \implies f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{x^4}$
- **Puissance** : $f(x) = (\ln(x))^3 \implies f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^2$
- **Composition** : $f(x) = \ln(\sin(x)) \implies f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Signe de $f'(x)$ et variations de $f(x)$

| Signe de $f'(x)$ | Variation de $f(x)$ |
|------------------|-----------------------------|
| $f'(x) > 0$ | f est croissante |
| $f'(x) < 0$ | f est décroissante |

Ne pas oublier les domaines de définition et de dérivée.

VI. Continuité

Objectifs

- ✓ Exploiter la continuité d'une fonction d'une variable réelle.
- ✓ Déterminer le nombre de solutions d'une équation $f(x) = k$ (Corollaire du TVI).

Définition

Une fonction f est **continue** en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe peut être tracée sans lever le crayon.

Théorème des Valeurs Intermédiaires - TVI

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Méthode : Corollaire du TVI - Unicité

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a, b]$.

Exemple

Soit f définie sur \mathbb{R} dont le tableau de variations est le suivant :

| | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 5 | 2 | $+\infty$ |

Le tableau de variations est complété avec des flèches indiquant les variations de la fonction : une flèche monte de $-\infty$ à 5 entre $x = -\infty$ et $x = -1$, une flèche descend de 5 à 2 entre $x = -1$ et $x = 3$, et une flèche monte de 2 à $+\infty$ entre $x = 3$ et $x = +\infty$.

L'équation $f(x) = 4$ admet exactement 3 solutions sur \mathbb{R} .

VII. Convexité

Objectifs

- ✓ Étudier la convexité d'une fonction à l'aide de sa dérivée seconde.
- ✓ Déterminer les points d'inflexion.

Fonction convexe / concave

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- ✓ f est **convexe** sur I si sa courbe est **en-dessous** de ses cordes et **au-dessus** de ses tangentes.
 $\iff f''(x) \geq 0$ sur $I \iff f'$ est **croissante** sur I .
- ✓ f est **concave** sur I si sa courbe est **au-dessus** de ses cordes et **en-dessous** de ses tangentes.
 $\iff f''(x) \leq 0$ sur $I \iff f'$ est **décroissante** sur I .

Point d'inflexion

Un **point d'inflexion** est un point de la courbe où la fonction change de convexité (de convexe à concave ou inversement).

En ce point, $f''(x_0) = 0$ et f'' change de signe.

Méthode

Pour étudier la convexité de f :

- 1) Calculer $f''(x)$.
- 2) Étudier le signe de $f''(x)$.
- 3) En déduire : $f''(x) > 0 \Rightarrow$ convexe, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concave.
- 4) Les points où f'' s'annule en changeant de signe sont des **points d'inflexion**.

VIII. Fonction logarithme

Définition

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que $\ln(1) = 0$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle : $\ln(x) = y \iff e^y = x$.

Propriétés algébriques

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- ✓ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- ✓ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- ✓ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- ✓ $\ln(a^n) = n \ln a$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$)
- ✓ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Limites et Croissance Comparée

- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ (L'axe Oy est asymptote verticale)
- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ($n \geq 1$) (L'exponentielle l'emporte sur les puissances)
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

Méthode : Dérivée de $\ln(u)$

Si u est une fonction dérivable et **strictement positive** sur I , alors $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Propriétés algébriques de l'exponentielle

Pour tout réel x , $e^x > 0$. Pour tous réels a, b et tout entier relatif n :

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| ✓ $e^a \times e^b = e^{a+b}$ | ✓ $(e^a)^n = e^{na}$ |
| ✓ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ | ✓ $\ln(x) > 0 \iff x > 1$ |
| ✓ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ | ✓ $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ |

Second degré

Équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- ✓ Si $\Delta > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Signe de a à l'extérieur des racines.
- ✓ Si $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Signe de a partout.
- ✓ Si $\Delta < 0$: pas de racine réelle. Signe de a partout.

IX. Primitives et intégrale

Définition

Soit f une fonction continue sur I . On appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Primitives usuelles

- ✓ $f(x) = x^n \implies F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
- ✓ $f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = \ln(x) \quad (\text{sur }]0, +\infty[)$
- ✓ $f(x) = e^{ax+b} \implies F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
- ✓ $f(x) = \cos(ax + b) \implies F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b)$

Composition

- ✓ $u'u^n \implies \frac{u^{n+1}}{n+1}$
- ✓ $\frac{u'}{u} \implies \ln(u)$
- ✓ $u'e^u \implies e^u$

Méthode : Intégration par parties - IPP

Pour calculer $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, on utilise :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Astuce pour choisir $u(x)$: **ALPES** (Arcsin, Logarithmes, Polynômes, Exponentielles, Sinus/Cosinus) ou **LIATE**.

Propriétés de l'intégrale

- ✓ **Linéarité** : $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
- ✓ **Relation de Chasles** : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- ✓ **Positivité** : Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- ✓ **Valeur moyenne** : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

X. Équations différentielles

Équations du type $y' = ay$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (où $a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = Ce^{ax} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Exemple 1

Résoudre $y' = 3y$.

Les solutions sont les fonctions $y(x) = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Équations du type $y' = ay + b$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

Résoudre $y' = -2y + 4$.

Ici $a = -2$ et $b = 4$. Les solutions sont :

$$y(x) = Ce^{-2x} - \frac{4}{-2} = Ce^{-2x} + 2 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Déterminer une solution particulière

Pour trouver l'unique solution vérifiant une condition initiale $y(x_0) = y_0$, on remplace dans la solution générale pour trouver la valeur de C .

Exemple 3

Soit $y' = 3y$ avec $y(0) = 5$.

On sait que $y(x) = Ce^{3x}$.

Or $y(0) = 5 \implies Ce^{3 \times 0} = 5 \implies C = 5$.

La solution unique est $y(x) = 5e^{3x}$.

Équation $y' + ay = g(x)$ (second membre fonction)

Pour résoudre $y' + ay = g(x)$:

- 1) Résoudre l'équation homogène $y' + ay = 0$: solutions $y_h = Ce^{-ax}$.
- 2) Trouver (ou vérifier) une **solution particulière** φ de $y' + ay = g(x)$.
- 3) La solution générale est : $y = Ce^{-ax} + \varphi$.

XI. Probabilités

Vocabulaire et Propriétés

- ✓ $P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$ (en équiprobabilité).
- ✓ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- ✓ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilités conditionnelles

La probabilité de B sachant A (avec $P(A) \neq 0$) est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Arbre pondéré

On utilise un arbre pondéré pour représenter les probabilités :

- ✓ La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités le long du chemin.
- ✓ $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$
- ✓ La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, \dots, A_n forment un système complet d'événements :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Soit : $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$.

Indépendance

A et B sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Indicateurs d'une loi discrète

- ✓ **Espérance** : $E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$
- ✓ **Variance** : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- ✓ **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Linéarité de l'espérance et variance

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- ✓ $E(aX + b) = aE(X) + b$
- ✓ $V(aX + b) = a^2V(X)$
- ✓ $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

1. Coefficients binomiaux et Bernoulli**Coefficient binomial**

$\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriétés :

- ✓ Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- ✓ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- ✓ **Relation de Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Épreuve et schéma de Bernoulli

- ✓ **Épreuve de Bernoulli** : épreuve à deux issues, le succès S et l'échec \bar{S} .
- ✓ **Loi de Bernoulli** de paramètre p : prend la valeur 1 avec proba p et 0 avec proba $1 - p$.
- ✓ **Schéma de Bernoulli** : succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

- ✓ $E(X) = np$
- ✓ $V(X) = np(1-p)$

2. Combinatoire et dénombrement

Formules de dénombrement

On choisit k éléments dans un ensemble à n éléments.

| | Avec répétition | Sans répétition |
|------------|--------------------|--|
| Avec ordre | p -liste : n^k | Arrangement : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ |
| Sans ordre | – | Combinaison : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ |

Permutation de n éléments : $n!$

3. Loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Inégalité de concentration

Si $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ (moyenne d'un échantillon de taille n) :

$$P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{V}{n\epsilon^2}$$

où $\mu = E(X)$ et $V = V(X)$.

Loi des grands nombres

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

Autrement dit, la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance.

XII. Géométrie dans l'espace

Vecteurs dans l'espace

- ✓ Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ✓ Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- ✓ Colinéarité : $\vec{u} = k\vec{v}$ pour un réel k
- ✓ Orthogonalité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Représentation paramétrique d'une droite

La droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Équation cartésienne d'un plan

L'équation cartésienne du plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ est :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Positions relatives

- ✓ Droite / Plan : $(d) \parallel (P) \iff \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 0$
- ✓ Droite \perp Plan : $(d) \perp (P) \iff \vec{u}_d = k\vec{n}_P$
- ✓ Plan / Plan : Parallèles si vecteurs normaux colinéaires.
- ✓ Droites gauches : Deux droites sont gauches \iff elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

Coplanarité

Trois points A, B, C définissent un plan si \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires.

Un point D est coplanaire avec A, B, C s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$.

1. Produit scalaire dans l'espace

Produit scalaire – Définition géométrique

Soient $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Le produit scalaire est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

En particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

✓ **Norme** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

✓ **Distance** : $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

✓ **Angle** : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$

✓ **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Orthogonale vs Perpendiculaire

- ✓ Deux droites sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- ✓ Deux droites sont **perpendiculaires** si elles sont orthogonales ET sécantes.
- ✓ Une droite est **orthogonale à un plan** si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

2. Projeté orthogonal et distances

Projeté orthogonal

- ✓ Le **projeté orthogonal** de A sur une droite (d) : intersection de (d) et du plan passant par A orthogonal à (d) .
- ✓ Le **projeté orthogonal** de A sur un plan (P) : intersection de (P) et de la droite passant par A orthogonale à (P) .

Distance

La **distance** d'un point à une droite (ou un plan) est la distance du point à son projeté orthogonal.

3. Intersection d'une droite et d'un plan

Méthode

Pour déterminer l'intersection d'une droite (d) et d'un plan (P) :

- 1) Écrire la représentation paramétrique de la droite.
- 2) Remplacer x, y, z dans l'équation du plan par ceux de la représentation paramétrique.
- 3) Résoudre l'équation pour trouver le paramètre t .
- 4) Remplacer t dans la représentation paramétrique pour obtenir les coordonnées du point d'intersection.

XIII. Algorithmique – Python

Objectifs

Maîtriser les bases de la programmation Python pour résoudre des problèmes mathématiques.

1. Manipulation de listes

Listes Python

Attention : les indices commencent à 0.

```
L1 = []          # liste vide
L2 = [1, 3, 7, 6] # liste avec des éléments

a = L2[0]       # élément d'indice 0 (= 1)
b = L2[1]       # élément d'indice 1 (= 3)
c = L2[-1]      # dernier élément (= 6)

n = len(L2)     # nombre d'éléments de L2
L2.append(8)    # ajoute 8 à la fin de L2
L2.remove(3)    # retire la première occurrence de 3
```

Génération par compréhension

```
[expression for objet in liste if condition]
```

Exemple : `[x**2 for x in range(10) if x % 2 == 0]` donne `[0, 4, 16, 36, 64]`.

2. Itération et parcours

Boucles

```
range(a, b, pas) # entiers de a à b-1 avec un pas donné

for i in range(n): # pour i allant de 0 à n-1
    ...           # indenter la partie à répéter

for i in L:       # parcourt les éléments de L dans l'ordre
    ...           # indenter la partie à répéter
```

3. Algorithmes classiques

Algorithme de seuil

Pour trouver le plus petit entier n tel que $u_n \geq s$ (suite croissante) :

```
def seuil(s):  
    u = # valeur de u(0)  
    n = 0  
    while u < s:  
        u = # expression de u(n+1)  
        n = n + 1  
    return n
```

Pour une suite décroissante : remplacer $u < s$ par $u > s$.

Algorithme de dichotomie

Résolution approchée de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$:

```
def dichotomie(f, a, b, p):  
    while abs(b - a) > 10 ** (-p):  
        m = (a + b) / 2  
        if f(a) * f(m) < 0:  
            b = m  
        else:  
            a = m  
    return m
```

XIV. Dernière ligne droite – J-30 avant le bac !

1. Les pronostics du bac 2025

Chapitres à maîtriser absolument

Voici les chapitres à **maîtriser absolument** selon les tendances des sujets officiels et des sujets tombés en avance :

- ✓ **Intégrales** : intégration par parties, exponentielle, trigo.
- ✓ **Suites** : suites définies par une intégrale, convergence, récurrence.
- ✓ **Équations différentielles** : résoudre $y' = ay + b$, variation de la constante.
- ✓ **Probabilités** : loi binomiale, indépendance, arbre pondéré, conditionnelles.
- ✓ **Étude de fonctions et continuité** : théorème des valeurs intermédiaires, limites.
- ✓ **Python / Algo** : boucle `while`, conditions, suite codée.

Travaille en priorité ces notions. Elles reviennent presque tous les ans.

Bon courage à tous !